



Софийски университет „Св. Климент Охридски”

Физически факултет

специалност Ядрена техника и ядрена енергетика

Цветелина Йорданова

Еволюция на нуклидния състав на ядреното гориво

Дипломна работа за придобиване на образователно-
квалификационна степен „бакалавър”

научен ръководител:

д-р Сребрин Колев

научен консултант:

доц. д-р Йонка Иванова

София, септември 2025 г.

Съдържание

1. Увод	3
2. Физични механизми на изменение на нуклидния състав	5
2.1. Ядрено делене	5
2.2. Радиоактивно разпадане	6
2.3. Скорости на реакции	8
3. Математическо поставяне на задачата	12
3.1. Балансни уравнения.....	14
3.2. Аналитичен подход за решение. Формули на Бейтман	15
3.3. Метод на матричната експонента	19
4. Решение на задачата за еволюция на нуклидния състав на ядреното гориво	22
5. Заключение	27
Литература	28
Приложение	29
Решение на уравненията за ^{135}I и ^{135}Xe	29

1. Увод

Ядрената енергетика, разгледана като самостоятелен индустриален сектор, поставя в рамките на своето приложение един изключително широк, специфичен и разнообразен набор от въпроси и задачи. Отговорите на тези въпроси най-често намират изражение в серия от активни, пряко свързани с областта дейности, част от които могат да включват: откриването и добивът на уранова руда, както и нейното преработване за целите на производство на ядрено гориво; експлоатацията на ядрени реактори за комерсиални или изследователски цели; преработването и съхранението на радиоактивни отпадъци; извършването на анализи за целите на ядрената безопасност; и др.

В сферата на ядрената енергетика от основно значение за постигането на високо ниво на ядрена безопасност е внимателното изследване и правилното моделиране на поведението на ядреното гориво както в активната зона на ядрените реактори по време на различните режими на работа, така и по време на неговото съхранение отвъд границите на планираната експлоатация. Ядреното гориво е материал, който в атомните електроцентрали се използва за генерирането на енергия (обикновено превръщана в топлинна и електрическа). За реакторите от типа ВВЕР-1000 (блок 5 и блок 6 на АЕЦ „Козлодуй“) с вода под налягане използваното ядрено гориво е изотопна смес от атомите на уран-238 и уран-235, където тегловното съдържание на уран-235 е по-високо от природното (0.7%), а типичните стойности след обогатяване са в интервала от 3÷5% (Harding, 2016). Ядреният материал се изготвя на няколко етапа, които включват химична, механична и термична обработка, а крайният резултат е керамика, съставена от UO_2 , под формата на горивна таблетка с цилиндрична форма и характерни размери за диаметър и височина от около един сантиметър. В активната зона на различните типове ядрени реактори горивните таблетки са подредени в горивни стълбове в конфигурация на триъгълна или квадратна решетка.

При експлоатация на горивото в активната зона на един ядрен реактор се поддържат условия за управляема верижна неутронна реакция на ядрено делене. Две важни обстоятелства, свързани с процеса на делене, са получаването на ядра фрагменти (наричани още продукти на делене) и изпускането на неутрони, които на свой ред могат да предизвикват последващи реакции на делене. Така поглъщането на неутрони в материала на горивото неизменно води до промяна на неговия изотопен състав. Друг механизъм, който допълнително характеризира процесите на изменение на нуклидния състав в горивото, е разпадането на радиоактивните изотопи и тяхното превръщане в изотопи на други химични елементи. По време на работа на един ядрен реактор от особено значение за динамиката на верижната реакция могат да бъдат някои преки продукти на деле-

не или радиоактивен разпад, които с голяма вероятност залавят неутрони, без това да води до реакция на делене. Такива са например изотопите ксенон-135 (с период на полуразпад от около девет часа) и самарий-149 (който е стабилен), а ефектът от тяхното количествено натрупване се отчита явно при моделиране на процеси, значими за експлоатационната реакторна физика.

С намаляването на ядрата на урана, което логично е съпроводено от увеличаване на продуктите на делене в горивната смес, в дългосрочен план се влошават т.нар. размножаващи свойства в активната зона на един ядрен реактор. След края на планираната за горивото експлоатация ядреното гориво е силно радиоактивно, а неговото съхранение се извършва при специални условия. Изотопният състав на горивото е пряко свързан както с някои негови характеристики, които са по-силно изразени скоро след изваждането му от активната зона, така и с други негови качества, които са обект на интерес дълго време след края на живота му в експлоатацията и са важни за дейностите по контрол, отчет, характеризиране, рециклиране или погребване на ядрените материали. Една важна характеристика на ядреното гориво в дългосрочен план е например неговата радиотоксичност, която дава оценка за потенциалните опасности, свързани със здравето на човека, в случай че радиоактивните изотопи на горивото биха попаднали непреднамерено в околната среда, а оттам и в човешкото тяло след поглъщане или вдишване.

Тематиката, засягаща ядреното гориво и неговите свойства, е безспорно всеобхватна, а цялостното ѝ разбиране би изисквало задълбочени познания по химия, физика, инженерни науки. Конкретно за целите на настоящата дипломна работа ще бъдат разгледани някои въпроси, свързани предимно с математическото моделиране на промяната на изотопния състав на ядреното гориво както по времето на експлоатация, така и след това, и ще бъдат коментирани съответните физични механизми и ефекти, съпровождащи процесите на еволюция на нуклидния състав в горивната смес.

2. Физични механизми на изменение на нуклидния състав

Еволюцията на изотопния състав на ядреното гориво може да бъде моделирана на основата на физичните явления, които са следствие от поглъщането на неутрони в реакторната среда и процесите на различните видове радиоактивен разпад.

Ядрените превръщания, които биват предизвикани от поглъщането на неутрон от дадено ядро, се наричат неутронни реакции и се класифицират като *ядрено делене* и *неутронно залавяне*. Друга широка категория от неутронни реакции е *неутронното разсейване*. То може да бъде *еластично*, когато при реакции от типа (n,n) сумарната кинетична енергия и импулсът на системата, съставена от ядрото мишена и връхлитащия неутрон, се запазват; но може да бъде и *нееластично*, когато при реакции от типа (n,n') вътрешната енергия на ядрото се променя и следователно кинетичната енергия и импулсът не остават постоянни в разглежданата система. Доколкото обаче разсейването не води до промяна в изотопния състав на горивото, неговото споменаване в изложението е единствено за пълнота.

2.1. Ядрено делене

Ядреното делене е процес, който често се описва в рамките на широкоразпространения *капков модел*, където ядрото се разглежда като обемно електрически заредена течна капка (Kraus, 1988). В следствие на критична деформация едно ядро може да се разкъса, като резултатът е получаването на т.нар. ядра фрагменти (или също продукти на делене) и няколко неутрона (обикновено два или три). Макар при някои тежки ядра да се наблюдават събития на спонтанно ядрено делене, в реакторната среда деленето най-често е индуцирано. Енергията, необходима за достигане на критична деформация, може да бъде предадена на ядрото по различни начини, които не изключват дори взаимодействия с гама-кванти или заредени частици. Характеристиките на неутрона обаче му позволяват той да внесе пряко енергията си на свързване (около 7-8 MeV) в ядрото, без да бъде повлиян от Кулоновите сили. Това прави неутронните реакции несравнимо по-ефективни.

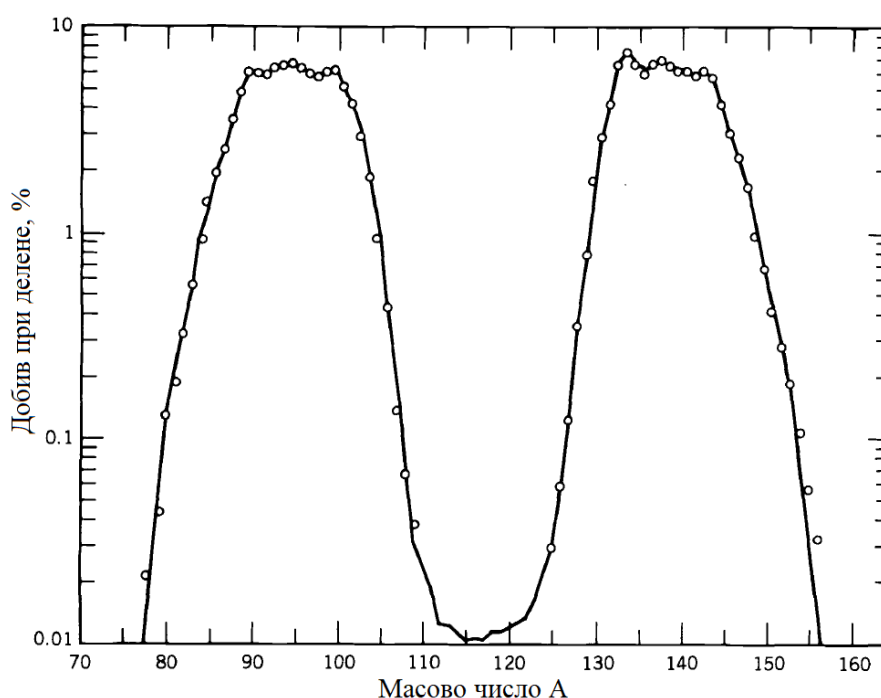
Продуктите от делене не са определени еднозначно. Съществува разпределение на ядрата фрагменти, като на Фиг. 1 е илюстрирана вероятността за тяхното образуване спрямо масовото им число при делене на уран-235 с топлинни неутрони (Diiorio, 1976). Следните две преки наблюдения могат да бъдат направени от фигурата: първо, разпределение е симетрично около центъра на кривата, което е израз на очакването на всеки по-тежък фрагмент да съответства по-лек, така че общия брой нуклони преди и след деленето да се запази; и второ, вероятността за симетрично ядрено делене, при което двата фрагмента са с почти равни масови числа, е около 600 пъти по-малко вероятно

спрямо събитията на делене, определящи максимумите на кривата. Въпреки това в литературата се отбелязва, че с увеличаване на енергията на частицата, предизвикваща ядреното делене, силно изразената вероятност в полза на несиметрично спрямо симетрично делене постепенно намалява.

Една типична неутронно индуцирана реакция на делене (с неутрони с топлинни енергии, ~ 0.025 eV) е следната:



Тъй като ядрата фрагменти най-често имат отношение N/Z , което е над необходимото за стабилност, част от неутроните „в излишък“ се изхвърлят почти мигновено след акта на делене, а техният среден брой е специфичен за всеки делящ се нуклид.



Фиг. 1. Разпределение на ядрата фрагменти при делене на уран-235 с топлинни неутрони

Освен мигновени неутронни при ядреното делене се изпускат и *закъсняващи* неутрони. Техният относителен дял е сравнително малък, като събитията на радиоактивно разпадане, които ги пораждат, се срещат веднъж на около 100 реакции на делене. Тези неутрони се изпускат след време от порядъка на секунди след акта на делене и са от съществено значение за контрола и управлението на ядрените реактори.

2.2. Радиоактивно разпадане

Спонтанните ядрени превръщания са процеси, характеризиращи нестабилните ядра, при които поради енергетичен преход се наблюдава изпускането на лъчение. Ако броят на нестабилните ядра в дадена проба е N в момента от време t , то скоростта на измене-

ние на броя на този тип ядра dN за интервал от време dt ще бъде именно пропорционален на броя на ядрата N така, че:

$$-\frac{(dN/dt)}{N} = \lambda \quad (2)$$

където λ е постоянна скаларна величина, известна като *константа на разпад*. Модулът на лявата страна на (2) има смисъл на отнесената към интервала dt вероятност за разпадане на едно ядро, а фактът, че величината λ е константа, независимо от възрастта на индивидуалните ядра, е основополагащото предположение в изграждането на статистическия закон за радиоактивното разпадане. Оттук интегрирането на (2) с начално условие $N(0) = N_0$ води до следния запис:

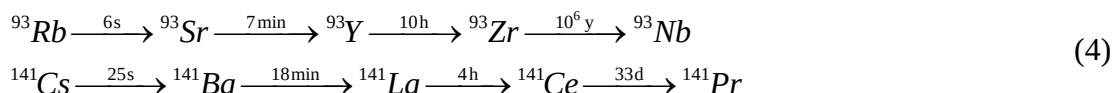
$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (3)$$

като е важно да се отбележи, че константата на разпад е различна за различните типове спонтанни ядрени превръщания при различните нуклиди.

Сред най-често срещаните видове лъчения, породени от радиоактивен разпад, са т.нар. α , β и γ лъчения. При първите два вида от нестабилното ядро се изпускат респективно α -частица (хелиево ядро) и β -частица (електрон при β^- разпад – при което явление един неутрон се превръща в протон; или позитрон при β^+ разпад – при което явление един протон се превръща в неутрон). Този природен процес е по същество ядрено превръщане, което има за цел да доближи нестабилното ядро до конфигурацията на възможно най-стабилния изобар според масовото число на ядрото след изхвърлянето на частицата. При γ -разпадане, от друга страна, едно ядро от възбудено състояние преминава в основно състояние, като от ядрото се изпуска фотонно лъчение, без това да води до промяна на първоначалния брой протони или първоначалния брой неутрони.

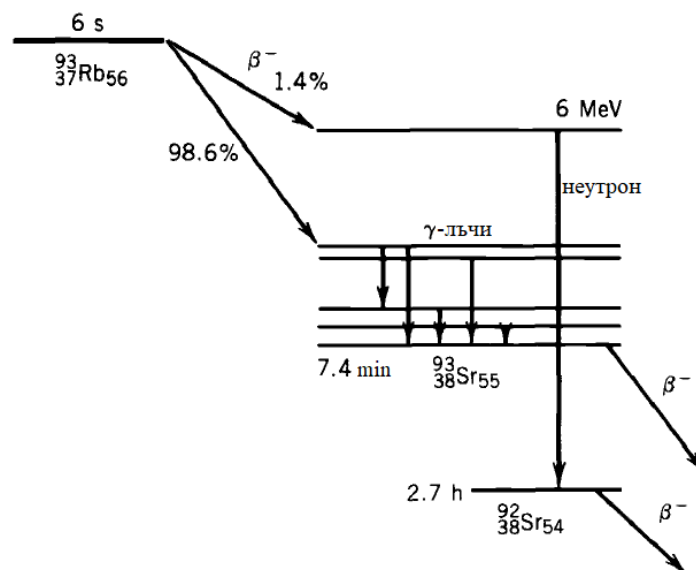
Експоненциалният закон за радиоактивното разпадане (3), произлизащ от важното допускане в (2), е в сила за всички процеси на спонтанно ядрено превръщане, които включват и важните от гледна точка на физиката на ядрените реактори събития на спонтанно делене и спонтанно изпускане на неутрони от нестабилни ядра.

Веднага след образуването си продуктите на ядрено делене са силно радиоактивни. Те достигат стабилност след редица от радиоактивни разпади (най често β^-). Една примерна верига от разпади за ядрата фрагменти в (1) е следната:



като при фрагмента ${}^{93}\text{Rb}$ е възможно след първоначалния β^- разпад нуклидът ${}^{93}\text{Sr}$ да бъде поставен във високоенергетично възбудено състояние, което да позволява прехо-

дът към състояние с по-ниска енергия да се осъществи чрез директно изпускане на неутрон от ядрото, както е илюстрирано на Фиг. 2.



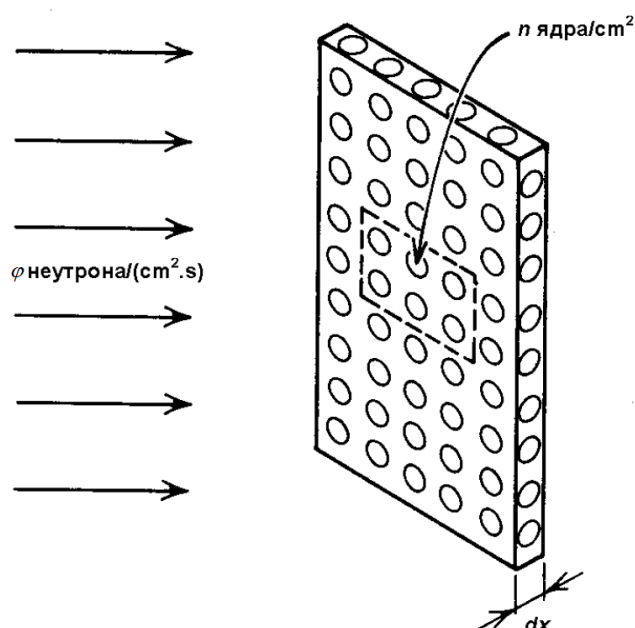
Фиг. 2. Излъчване на закъсняващ неутрон от ядрото на ^{93}Sr при прехода към ^{92}Sr след β^- разпад на ^{93}Rb

Фрагментите от делене и техните дъщерни продукти, получавани в следствие на радиоактивен разпад, са радиоактивният отпадък, който се генерира по време на експлоатация на ядреното гориво. С увеличаване на концентрацията на тези продукти на делене, наричани още шлаки, се влошават размножаващите свойства на горивото. Една обща мярка за натрупването на шлаки и за изгарянето на делящите се нуклиди, като уран-235, е величината *дълбочина на изгаряне* B . Тъй като еволюцията на нуклидния състав е пряко свързана с общия брой събития на ядрено делене, отнесени към масата на горивото, дълбочината на изгаряне най-често се дефинира като отношение на енергията, получена от делене, и общата начална маса на уран-238 и уран-235, която е около 88% от масата на UO_2 . Така мерната единица за дълбочина на изгаряне е MWd/kgU , където $1 \text{ MWd} = 8.64 \times 10^{10} \text{ J}$.

2.3. Скорости на реакции

Изменението на концентрациите на различните изотопи в състава на ядреното гориво във времето се определя от честотата на събитията, които водят до образуването или изчезването на разглежданите нуклиди в системата. По време на работа на реактора горивото е подложено на продължително неутронно облъчване, а взаимодействието на неутроните със средата може да бъде описано в рамките на разглежданията по-долу.

Една от основните величини в реакторната физика е *насочената плътност на неутронния поток* $\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$. Тя зависи от времето, а също и от координатите ($\vec{r}$), енергията (E) и посоката ($\vec{\Omega}$) на движение на неутроните. Нейната размерност е $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, а физичният ѝ смисъл е броят неутрони, пресичащи единична площ за единица време във фазовото пространство, определено от координатите $\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t$. На Фиг. 3 е изобразена произволна хомогенна мишена с елементарна дебелина dx , така че проекциите на индивидуалните ядра върху лицевата ѝ площ да не се застъпват. Мишената е облъчвана с постоянен във времето моноенергетичен неутронен сноп, който е насочен перпендикулярно на повърхността на мишената.



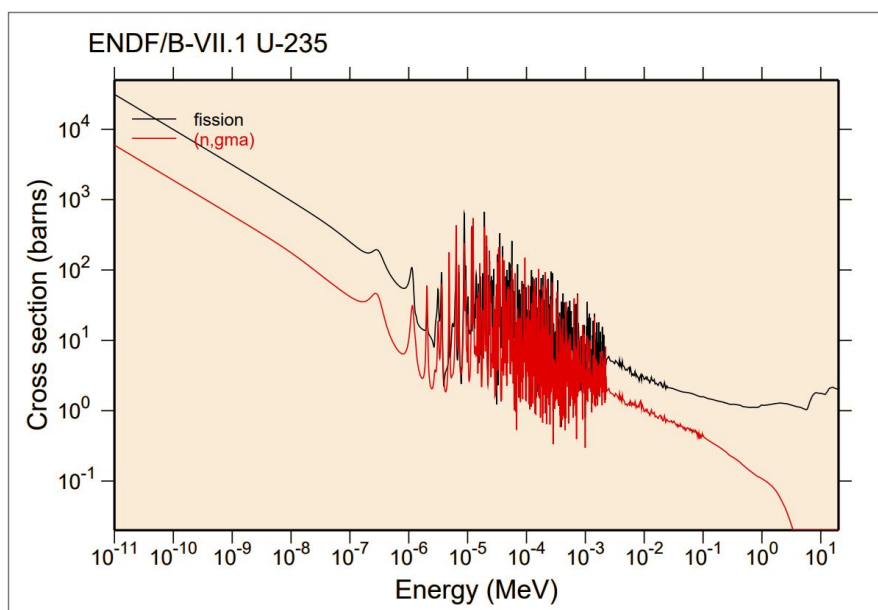
Фиг. 3. Постоянен моноенергетичен неутронен сноп, падащ перпендикулярно върху повърхността на тънка еднородна мишена

Ако ядрената плътност на материала, от който е изработена мишената, е γ [cm^{-3}], то за случая от Фиг. 3 елементарният брой стълкновения на неутрони с ядра от мишената с елементарна дебелина dx ще бъде:

$$\frac{dR}{[\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}]} = \sigma \frac{\phi}{[\text{cm}^2]} \gamma \frac{dx}{[\text{cm}^{-3}][\text{cm}]} \quad (5)$$

където γdx [cm^{-2}] е броят на ядрата, които се падат на единична площ от лицевата повърхност на мишената. Величината dR е логично право пропорционална на интензитета на неутронния поток, плътността на мишената и нейната дебелина. Коефициентът σ характеризира материала на средата и може да се интерпретира като мярка за вероятността за взаимодействие на един неутрон с индивидуално ядро от мишената. Нарича се *микроскопично ядрено сечение* и има размерност на площ. В реакторната физика за

удобство е прието сеченията за неутронни реакции да се измерват в *барнове*, като $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$. Ядрените сечения се отнасят за конкретен тип реакция, като например σ_a за поглъщане, σ_s за разсейване, σ_f за делене и т.н. На Фиг. 4 е представено поведението на някои микросечения за уран-235 според библиотеката с оценени ядрени данни ENDF/B-VII.1 (Chadwick et al., 2011).

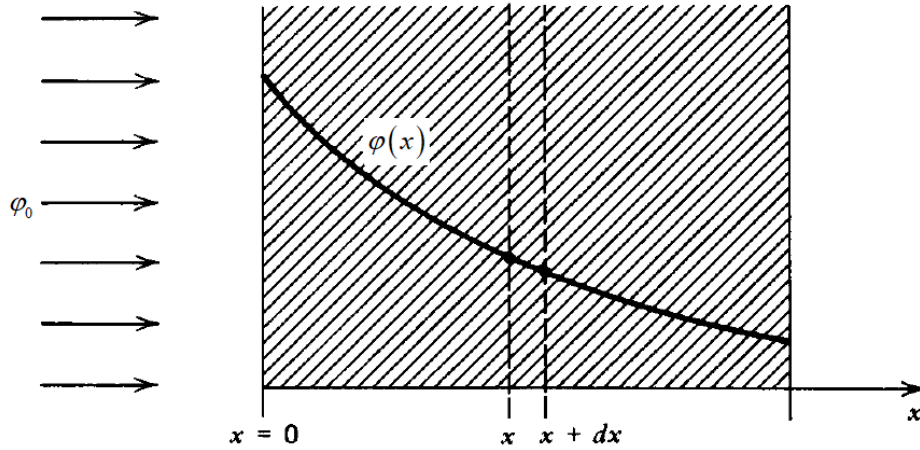


Фиг. 4. Микроскопични сечения на изотопа уран-235 според библиотеката с оценени ядрени данни ENDF/B-VII.1

Общият ход на енергетичната зависимост на микросеченията може да бъде обяснен чрез вълновата природа на неутрона. С намаляване на неутронната енергия нараства дължината на вълната на неутрона, която е мярка за неговият ефективен размер и следователно има връзка с вероятността за взаимодействие с ядрото. Това е в пряка подкрепа на наблюдението, че микросеченията следват закона $\sigma \propto 1/\sqrt{E}$, тъй като за дължината на вълната на неутрона е изпълнено: $\lambda = h/p$, където p е импулсът на неутрона, а h е константата на Планк.

Наблюдаваните пикове в сеченията при енергии между 1 eV и няколко keV се наричат *резонанси* и могат да се обяснят с наличието на специални енергетични състояния, в които ядрото може да остане след поглъщането на неутрона. Ако общата енергия на системата (която включва кинетичната енергия на неутрона и енергията му на свързване в новообразуваното се *съставно* ядро) е близка до енергията на някое от тези разрешени състояния, то при съответната позиция в зависимостта на сечението ще се наблюдава максимум.

Доколкото в общия случай на реална мишена ядрата ще се екранират взаимно в дълбочина по посока на проникващото неутронно лъчение, dR от (5) ще има смисъла на отслабване на интензитета на лъчението поради стълкновения на неутроните с ядрата в слоя dx около x , както е илюстрирано на Фиг. 5.



Фиг. 5. Отслабване на интензитета на неутронно лъчение в мишена в дълбочина по посока на разпространение на неутроните

Така за неутронния поток при конкретно поставените условия на разглеждането ще бъде в сила:

$$d\varphi(x) = \varphi(x+dx) - \varphi(x) = -dR(x) = -\varphi(x)\sigma\gamma dx \quad (6)$$

или още:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\varphi(x)\sigma\gamma \quad (7)$$

Решението на (7) при начално условие $\varphi(0) = \varphi_0$ ще бъде:

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp(-\sigma\gamma x) = \varphi_0 \exp(-\Sigma x) \quad (8)$$

Величината $\Sigma \equiv \sigma\gamma$ с размерност cm^{-1} се нарича *макроскопично сечение* и аналогично на микроскопичните сечения се класифицира според конкретния тип на неутронната реакция.

Прието е в реакторната физика скоростите на реакции да се дефинират за единица обем. Така за произволен тип реакция α броят събития, наблюдавани за единица време в единица обем, ще бъде:

$$R = \Sigma_{\alpha}(\vec{r}, E) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (9)$$

където зависимостта от времето е пренебрегната; зависимостта от координатата предполага възможността за хетерогенна материална среда; а зависимостта от енергията вече беше коментирана по повод на Фиг. 4.

Когато сечението за съответния тип неутронна реакция не зависи от посоката на разпространение на неутрона, каквото е предположението в (9), е уместно скоростта на реакция да бъде интегрирана в пълните граници на пространствения ъгъл:

$$\begin{aligned} R &= \int_{4\pi} \Sigma_{\alpha}(\vec{r}, E) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\Omega \\ &= \Sigma_{\alpha}(\vec{r}, E) \int_{4\pi} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\Omega = \Sigma_{\alpha}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) \end{aligned} \quad (10)$$

където величината Φ се нарича *плътност на скаларния неутронен поток*.

3. Математическо поставяне на задачата

В общия случай еволюцията на нуклидния състав на горивото в следствие на неутронно облъчване по време на работа на един ядрен реактор ще зависи от разпределението на скоростите на реакции в активната зона. Това разпределение според (10) зависи от разпределението на неутронния поток във фазовото пространство, в което е дефиниран. Тъй като потокът е решение на уравнението на неутронен пренос за конкретно зададена геометрия и материален състав, точното моделиране на изотопното съдържание в горивото би изисквало решение на уравнението на неутронен пренос, което да отчита и промяната на материалния състав във времето и пространството. Това прави пълната тримерна задача изключително тежка в изчислително отношение. За практически цели най-често се прилага описаният по-долу опростен подход, който до голяма степен запазва точността на получаваните резултати.

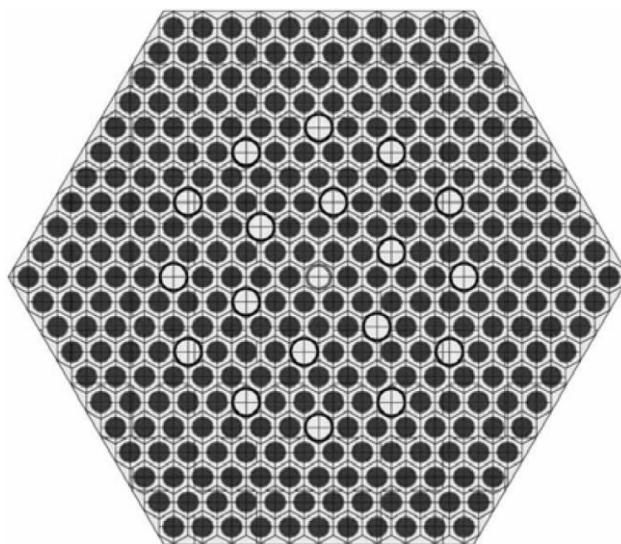
Като първи етап от методологията се изготвят двумерни детайлни модели на горивни касети според тяхната геометрия и материални зони в напречната равнина, определена от горивната област на касетите. Тези двумерни модели се поставят в гранични условия на безкрайна периодична решетка или отражение. За всеки модел поотделно се извършват стационарни пресмятания, като последователно (стъпаловидно) се натрупва дълбочина на изгаряне, според която се актуализира материалният състав на горивните области за всяка следваща стъпка. Дължините на стъпките по изгаряне се избират така, че да описват адекватно зависимостта на концентрациите на разглежданите изотопи в горивната смес според дълбочината на изгаряне. Пресмятанията обикновено се извършват за сравнително голям брой енергетични групи, който да бъде представителен за енергетичната зависимост на неутронните сечения. Хетерогенността на материалния състав налага използването на методи за решаване на уравнението на неутронен пренос, които позволяват сравнително детайлно описание на зависимостта на насочения неутронен поток от посоката на разпространение на неутрона $\vec{\Omega}$, както и на зависимостта на сечението за разсейване от ъгъла на разсейване. На основата на получените решения се изготвят еднотрупови библиотеки със сечения за поглъщане и делене, пре-

теглени по спектъра на неутронния поток, така че да бъдат запазени действителните скорости на реакции:

$$\Sigma_{\alpha} = \frac{\int \int_V \Sigma_{\alpha}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) dE dV}{\int \int_V \Phi(\vec{r}, E) dE dV} \quad (11)$$

Библиотеките със сечения обикновено са параметризирани по дълбочина на изгаряне, начално обогатяване на горивото по уран-235 и плътност на забавителя. За получаването на сечения, които не отговарят на точно определени записи в наличната библиотека, най-често се използват методите на интерполация. Използването на предварително изготвени библиотеки спестява значително количество време при последващи анализи на еволюцията на нуклидния състав за касети с конкретни различни истории на облъчването по време на експлоатация в активната зона и престоя извън нея.

За целите на настоящата дипломна работа е използвана една от стандартните еднорупови библиотеки, които са налични в ресурсите на програмния комплекс за реакторнофизични анализи SCALE (Wieselquist, 2020). Библиотеката е с общо предназначение за гориво, използвано в реакторите от типа ВВЕР-1000. Двумерният математически модел на касетата е представен на Фиг. 6. Обогатяването по уран-235 е еднакво за всички горивни елементи.



Фиг. 6. Двумерен модел на горивна касета за реактор от типа ВВЕР-1000

За модела от Фиг. 6 са налични еднорупови сечения, изготвени за шест различни обогатявания, съответно: 1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 и 6.0 тегловни процента. Записите в библиотеката са валидни за дълбочини на изгаряне до 70.5 MWd/kgU. Плътността на забавителя е 0.75 g/cm³. Някои по-важни параметри, свързани с геометрията на модела, са представени в Табл. 1.

Табл. 1. Геометрични характеристики на модела за горивна касета

параметър	размер, cm
диаметър на горивната таблетка	0.772
външен диаметър на обвивката	0.900
стъпка на решетката	1.275
външен диаметър на направляващите канали	1.260
вътрешен диаметър на направляващите канали	1.100
външен диаметър на централната тръба	1.120
вътрешен диаметър на централната тръба	0.960
външен размер на модела за касета	23.600

Библиотеката е валидирана чрез сравнение на количествени резултати между пресметнати и измерени стойности за концентрациите на някои изотопи на уран, плутоний, нептуний, америций и др. (Plas et al., 2007).

3.1. Балансни уравнения

Изменението на концентрацията на всеки индивидуален нуклид от разглежданата система във времето се описва математически чрез баланса на скоростите на образуване и изчезване на този нуклид по всички възможни канали. Така балансното уравнение за концентрацията $N_i(t)$ на i -тия нуклид от материал, подложен на неутронно облъчване, ще бъде:

$$\frac{d}{dt} N_i(t) = \sum_{j \neq i} \Phi \gamma_{j \rightarrow i} \sigma_j N_j(t) + \sum_{j \neq i} f_{j \rightarrow i} \lambda_j N_j(t) - (\Phi \sigma_i + \lambda_i) N_i(t) \quad (12)$$

В уравнението (12) величината Φ е еднотруповият скаларен неутронен поток, който се приема за постоянен в разглеждания интервал от време; σ е еднотрупово микроскопично неутронно сечение за поглъщане; $\gamma_{j \rightarrow i}$ е добивът на нуклида i в следствие на поглъщане на неутрон от нуклида j , което включва и процесите на ядрено делене като резултат от поглъщането; λ е константа на радиоактивно разпадане; $f_{j \rightarrow i}$ е добивът на нуклида i в следствие на спонтанно ядрено превръщане на нуклида j .

Съвместният запис на всички балансни уравнения за разглежданите нуклиди в даден материал ще образува една свързана хомогенна система от линейни обикновени диференциални уравнения от първи ред. Тази система може да бъде компактно представена в матрично-векторна форма:

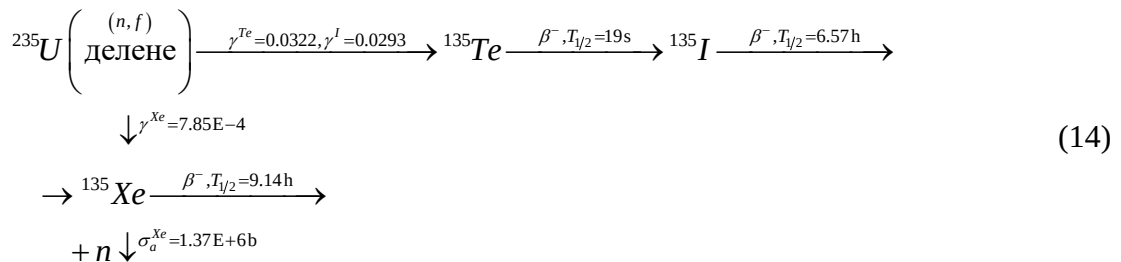
$$\frac{d}{dt} \vec{N}(t) = \hat{A} \vec{N}(t) \quad (13)$$

където матрицата $\hat{A}$ е с постоянни коефициенти. Поради физическия смисъл на елементите си матрицата е известна още като *матрица на преходите*. Началните условия, оп-

ределящи еднозначно решението на (13), също могат да се запишат компактно според приетите означения: $\vec{N}(0) = \vec{N}_0$.

3.2. Аналитичен подход за решение. Формули на Бейтман

Когато разглежданата система от нуклиди представлява сравнително къса верига от еднопосочни преходи, е разумно решението на задачата да бъде съставено аналитично. Една примерна къса верига от радиоактивни превръщания, която има особено значение за експлоатационната реакторна физика, е веригата (14) на образуване и изчезване на изотопа ксенон-135.



Продуктите на делене, които имат голямо сечение за залавяне на неутрони, са познати като *отровители*. Тяхното влияние върху динамиката на процесите в реакторната среда е съществено, което в общия случай налага явното проследяване на концентрациите им в хода на експлоатация.

За целите на текущото разглеждане по повод на (14) е избрано източникът от делене да бъде представен единствено от изотопа уран-235. Необходимите за пълноценното поставяне на задачата константи са изложени в Табл. 2. Еднотруповите сечения са претеглени по неутронния спектър, получен при решаването на неутронната задача от методиката, коментирана в раздел 3.

Табл. 2. Описание на константите във веригата на ксенон-135

изотоп	σ_a , b	σ_f , b	γ , %	λ , s ⁻¹
²³⁵ U	375.3	304.7	N/A	N/A
¹³⁵ Te	≈ 0.0	N/A	3.22	3.65E-2
¹³⁵ I	1.34E-2	N/A	2.93	2.93E-5
¹³⁵ Xe	1.37E+6	N/A	7.85E-2	2.11E-5

Информация за добивите от делене при три различни неутронни енергии: 0.0253 eV (топлинна енергия), 500 keV и 14 MeV за делящи се нуклиди е налична в данните, използвани за направата на библиотеката. Решението на неутронната задача позволява да се оцени средната енергия на неутроните, които предизвикват делене (15). В записа (15) е използвано енергетично-групово представяне, където за група g величините E_g , $\sigma_{f,g}$ и ϕ_g са съответно енергията на неутрона, сечението за делене и неутронният поток.

$$\bar{E}_n = \frac{\sum_g E_g \sigma_{f,g} \varphi_g}{\sum_g \sigma_{f,g} \varphi_g} \quad (15)$$

Ако $\bar{E}_n$ не съвпада с някоя от енергиите, за които са предоставени данни за добивите от делене, се прилагат техниките на интерполация, оказани в документацията на файловете ENDF/B (Schwerer, 1985).

Конкретното разглеждане на задачата от схемата за ксенона (14) може да бъде опростено допълнително, ако в наличната верига бъде пропуснат изотопа телур-135. Допускането, че решението за концентрацииите на изотопите след изключването на даден нуклид няма да се измени съществено, е оправдано само в случаите, в които скоростта на изчезване на нуклида, подлежащ на изключване, е много по-голяма от тази на изотопите, получавани непосредствено след него във веригата. Така, ако се интересуваме главно от натрупването на йод и ксенон в системата, можем да запишем следните балансни уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= \gamma_I \Sigma_f \Phi - \lambda_I I(t) \\ \frac{d}{dt} Xe(t) &= \gamma_{Xe} \Sigma_f \Phi + \lambda_I I(t) - \sigma_{Xe} \Phi Xe(t) - \lambda_{Xe} Xe(t) \end{aligned} \quad (16)$$

където е прието, че концентрацията на урана е постоянна във времето; добивът от делене на йода е обединен с този на телура $\gamma_I \leftarrow \gamma_I + \gamma_{Te}$, за да бъде запазен балансът на скоростите; поглъщането на неутрони от йода е пренебрегнато; $\Sigma_f \equiv \sigma_f U$, а Φ е еднотруповият скаларен неутронен поток. За илюстрация на решението на системата (16) концентрацията на уран-235 може да бъде оценена по следния начин. Ако плътността на UO_2 е $\rho = 10.4 \text{ g/cm}^3$, масовият дял на урана е $w = 0.8815$, а обогатяването по уран-235 (в тегловни проценти) е $x = 4.0\%$, то началната концентрация на уран-235 ще бъде: $U(0) = xw\rho N_A/A = 9.395E+20 \text{ cm}^{-3}$, където N_A е числото на Авогадро, а A е атомната маса на уран-235. Оттук оценката на еднотруповия поток може да бъде съставена, както следва. За достигане на дълбочини на изгаряне около $B = 55 \text{ MWd/kgU}$ за време $t = 1320 \text{ d}$ (четири горивни кампании) при постоянна мощност и фиксирана енергия от делене $E_f = 200 \text{ MeV}$ за потока се получава: $\Phi = 4.165E+13 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Решението на (16) е изведено в Приложението на дипломната работа. Изразите за концентрацииите на йода и ксенона при начални условия $I(0) = I_0$ и $Xe(0) = Xe_0$ са съответно:

$$I(t) = I_0 \exp(-\lambda_I t) + \frac{\gamma_I \Sigma_f \Phi}{\lambda_I} (1 - \exp(-\lambda_I t)) \quad (17a)$$

$$\begin{aligned}
Xe(t) = & Xe_0 \exp(-\omega_{Xe}t) \\
& + \frac{\lambda_I I_0 - \gamma_I \Sigma_f \Phi}{\omega_{Xe} - \lambda_I} (\exp(-\lambda_I t) - \exp(-\omega_{Xe} t)) \\
& + \frac{(\gamma_I + \gamma_{Xe}) \Sigma_f \Phi}{\omega_{Xe}} (1 - \exp(-\omega_{Xe} t))
\end{aligned} \tag{176}$$

където $\omega_{Xe} \equiv \sigma_{Xe} \Phi + \lambda_{Xe}$.

Аналитичният труд, който е необходим за намирането на затворените изрази, които са решение на набора от хомогенни линейни обикновени диференциални уравнения от първи ред, нараства с размерността на системата и зависи от структурата на нейната матрица.

Ако задачата е съставена за еднопосочна верига от ядрени превръщания без разклонения (18а), матрицата на преходите ще има долна двудиagonalна форма, поради вида на прилежащата система (18б).

$$N_1 \xrightarrow{\lambda_1} N_2 \xrightarrow{\lambda_2} \dots \xrightarrow{\lambda_{n-1}} N_n \xrightarrow{\lambda_n} \dots \tag{18a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} N_1(t) &= -\lambda_1 N_1(t) \\
\frac{d}{dt} N_i(t) &= \lambda_{i-1} N_{i-1}(t) - \lambda_i N_i(t), i = 2, 3, \dots, n
\end{aligned} \tag{18б}$$

Ако в допълнение към вида на (18) началните условия са:

$$N_1(0) = N_1^0; N_i(0) = 0, i = 2, 3, \dots, n \tag{19}$$

така че в началото да са налични ядра само на първия нуклид във веригата, то може да се покаже, че за решението на системата съществува компактен запис (Bateman, 1910):

$$N_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i \exp(-\lambda_i t) \tag{20a}$$

където:

$$c_i = N_1^0 \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_j - \lambda_i)}, i = 1, 2, \dots, n \tag{20б}$$

Едно полезно наблюдение, когато се използват формулите (20), е, че за решението на задачи с начални условия, които предполагат ненулеви концентрации на нуклидите след първия във веригата, може да се използва суперпозиция на решенията на отделните подслучаи, показани в (21). Друго важно обстоятелство е, че за вериги, в които скоростта на изчезване на даден нуклид не е равна на скоростта на образуване на следващия, изразите (20) трябва да се модифицират така, че в показателите на експонентите

от (20а) и в знаменателите на коефициентите (20б) да присъстват константите λ , отговарящи на скоростите на изчезване на съответните нуклиди, докато в числителите на коефициентите (20б) константите λ трябва да отговарят на скоростите на образуване на съответните нуклиди (според прилежащите индекси).

$$\begin{aligned}
 N_1; N_1(0) \neq 0 &\xrightarrow{\lambda_1} N_2; N_2(0) = 0 \xrightarrow{\lambda_2} N_3; N_3(0) = 0 \xrightarrow{\lambda_3} \dots \\
 N_1; N_1(0) = 0 &\xrightarrow{\lambda_1} N_2; N_2(0) \neq 0 \xrightarrow{\lambda_2} N_3; N_3(0) = 0 \xrightarrow{\lambda_3} \dots \\
 N_1; N_1(0) = 0 &\xrightarrow{\lambda_1} N_2; N_2(0) = 0 \xrightarrow{\lambda_2} N_3; N_3(0) \neq 0 \xrightarrow{\lambda_3} \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{21}$$

Ограничението за използването на формулите на Бейтман само за задачи от вида (18) без разклонения може да бъде преодоляно, като задачата бъде преформулирана за набор от самостоятелни линейни вериги според преходите в системата. Ако разгледаме отново задачата за ксенона, но отчетем явно и четирите нуклида от (14), ще имаме:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}U(t) &= -\sigma_a^5 \Phi U(t) \\
 \frac{d}{dt}Te(t) &= \gamma_{Te} \sigma_f^5 \Phi U(t) - \lambda_{Te} Te(t) \\
 \frac{d}{dt}I(t) &= \gamma_I \sigma_f^5 \Phi U(t) + \lambda_{Te} Te(t) - (\sigma_a^I \Phi + \lambda_I) I(t) \\
 \frac{d}{dt}Xe(t) &= \gamma_{Xe} \sigma_f^5 \Phi U(t) + \lambda_I I(t) - (\sigma_a^{Xe} \Phi + \lambda_{Xe}) Xe(t)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Системата (22) отчита изгарянето на уран-235 с времето. Това би изисквало корекция на неутронния поток, за да е изпълнено условието за поддържане на постоянна мощност, но тъй като за сравнително кратки времена съпътстващите ефекти са слаби, корекция на потока във времето за целите на настоящото изследване не е извършена.

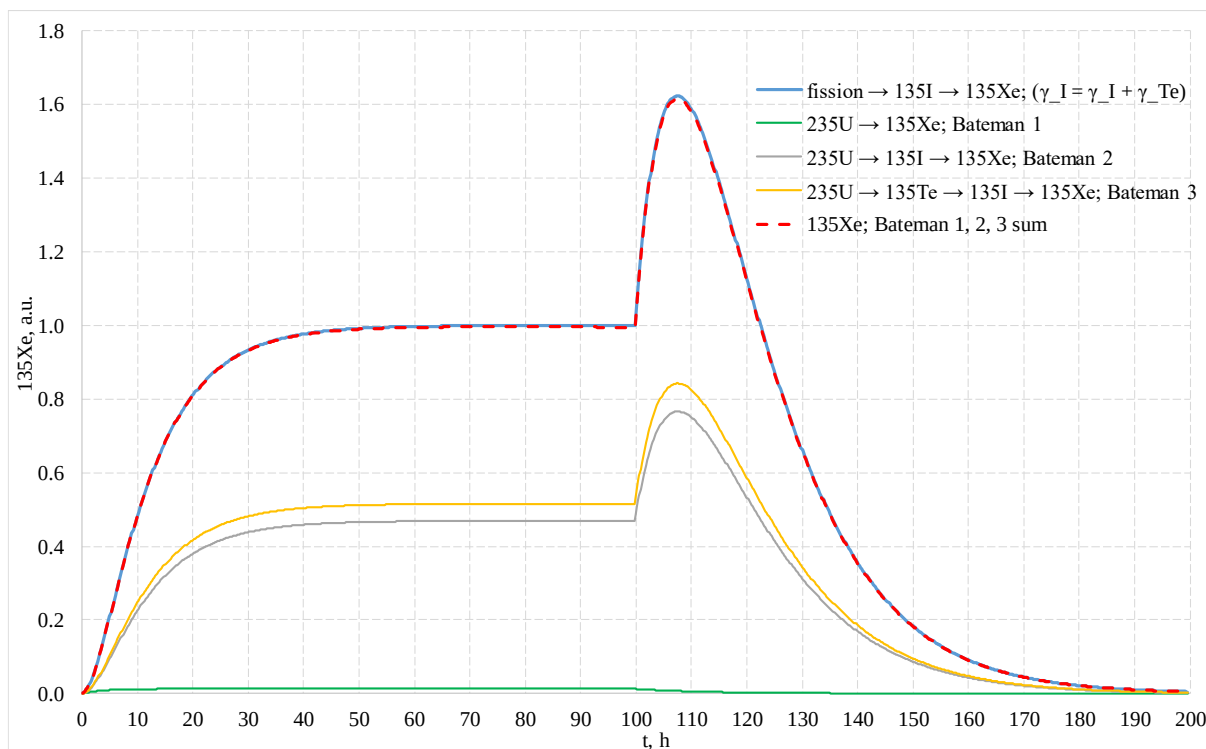
За да бъде приложен пълноценно подходът на Бейтман за оценка на концентрацията на ксенона във времето, задачата трябва да се раздели на три отделни вериги:



След адресирането на всички ограничения на метода и спазването на всички особености при съставянето на решение поведението на концентрацията на ксенона във времето е илюстрирано за следния конкретен процес:

- началните условия са за ненулева концентрация единствено на уран-235;
- за първите 100 часа неутронният поток е постоянен;
- за вторите 100 часа неутронният поток е нулев.

Решението на задачата е представено на Фиг. 7.



Фиг. 7. Зависимост на концентрацията на изотопа ксенон-135 от времето

Синята крива от Фиг. 7 е получена директно чрез израза (176). Пълноценното решение на системата с четири нуклида на основата на формулите на Бейтман показва, че допусканията по повод на (16) са оправдани. Пропускането на телура във веригата не води до съществени разлики в решението за ксенона. Относителните разлики между числените стойности на синята (непрекъсната) и червената (прекъсната) линия за първите 30 min от процеса са малко над 1%, след което до края на процеса ($t = 200$ h) разликите са винаги под 1%.

Основен недостатък на подхода на Бейтман е, че не позволява решаването на системи с пълна матрица. Така в рамките на метода не могат да бъдат моделирани преходи от дъщерни към родителски нуклиди, например при неутронно индуцирани реакции. Един допълнителен недостатък от числен характер при особено големи системи от нуклиди може да бъде и натрупването на грешки при наличието на нуклиди със сравнително близки константи λ поради знаменателя на израз (186). Ваденето на близки числа би довело до т.нар. *катастрофална загуба на точност*.

3.3. Метод на матричната експонента

Неудобствата и ограниченията, установени в предходния подраздел, могат да бъдат преодолені по повод на задачата за хомогенна система от линейни обикновени диференциални уравнения от първи ред (13) с матрица с постоянни коефициенти и произ-

волна структура, като се изгради следният изчислителен подход за решение, основаващ се на теоремата на Тейлор за развитие на функция в ред.

Обобщеният векторен запис за прилагането на теоремата на Тейлор върху зависимостта на концентрациите на разглежданите нуклиди в системата от времето има следния вид:

$$\vec{N}(t) = \vec{N}(t_0) + \frac{d\vec{N}(t_0)}{dt}(t-t_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2\vec{N}(t_0)}{dt^2}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \frac{d^k\vec{N}(t_0)}{dt^k}(t-t_0)^k + \dots \quad (24)$$

От условието на задачата (13) получаваме израз за първата производна:

$$\frac{d\vec{N}(t_0)}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\vec{N}(t_0) = \hat{\mathbf{A}}\vec{N}_0 \quad (25)$$

където $\vec{N}_0$ са концентрациите в началния момент. Може да се покаже, че на основата на (13) могат да се получат изрази и за по-високите производни. Например за произволна компонента на $\vec{N}(t)$ имаме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_i(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dN_i(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_j a_{ij} N_j(t) \right) = \sum_j a_{ij} \frac{dN_j(t)}{dt} \\ &= \sum_j a_{ij} \left(\sum_k a_{jk} N_k(t) \right) = \sum_k \left(\sum_j a_{ij} a_{jk} \right) N_k(t) = \sum_k [\hat{\mathbf{A}}^2]_{ik} N_k(t) \end{aligned} \quad (26)$$

Чрез полагане $\hat{\mathbf{B}} \equiv \hat{\mathbf{A}}^2$ може да се изведе подобно на (26) запис и за третата производна, а оттам аналогично и за всяка следваща. Така последователно може да се удостовери, че (27):

$$\frac{d^k \vec{N}(t_0)}{dt^k} = \hat{\mathbf{A}}^k \vec{N}(t_0) = \hat{\mathbf{A}}^k \vec{N}_0 \quad (27)$$

е изпълнено за произволно k . След заместване изразът (24) придобива вида:

$$\begin{aligned} \vec{N}(t) &= \vec{N}(t_0) + \hat{\mathbf{A}}\vec{N}_0(t-t_0) + \frac{1}{2!} \hat{\mathbf{A}}^2 \vec{N}_0(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \hat{\mathbf{A}}^k \vec{N}_0(t-t_0)^k + \dots \\ &= \left(\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{A}}(t-t_0) + \frac{1}{2!} \hat{\mathbf{A}}^2(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \hat{\mathbf{A}}^k(t-t_0)^k + \dots \right) \vec{N}_0 \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\mathbf{A}}^n (\Delta t)^n}{n!} \right) \vec{N}_0 \end{aligned} \quad (28)$$

Прието е сумата в скобите след последното равенство в горния израз да се нарича *матрична експонента* $\exp(\hat{\mathbf{A}}(\Delta t))$ поради аналогичния вид на разложението в случая на скаларна величина:

$$\exp(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!} \quad (29)$$

Решението на задачата за изменението на концентрациите на нуклидите във времето се изгражда на основата на (28), като практическата процедура има следните стъпки:

– инициализация на $c_i^{(0)} \leftarrow N_i(t_0)$ и $N_i(t_0 + \Delta t) \leftarrow c_i^{(0)}$ за $i = 1, 2, \dots, n$;

– за $k = 1, 2, \dots$:

– пресмятане на $c_i^{(k)} = \frac{\Delta t}{k} \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j^{(k-1)}$;

– актуализиране на парциалната сума $N_i(t_0 + \Delta t) \leftarrow N_i(t_0 + \Delta t) + c_i^{(k)}$.

Точното решение би изисквало: $\vec{N} = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{c}^{(k)}$, което е практически неприложимо. Ра-

зумно условието за прекъсване на реда е налагането на критерий от вида $\|\vec{c}^{(k)}\| \leq \delta \|\vec{N}\|$,

където положителното число δ подлежи на избор. Сходимостта на реда (28) се гарантира от свойствата на тейлоровото разложение, но допускането на голям брой членове в сумата може да доведе до натрупване на значими грешки от закръгление. Тъй като мо-

нотонното намаляване на $\frac{1}{k!} \|\hat{\mathbf{A}}^k\| (\Delta t)^k$ с нарастване на k определя (според поставения

критерий) броя на членовете в сумата на решението, то този брой може да се намали, ако се намали стъпката на интегриране Δt или се намали нормата на матрицата. Намаляването на Δt е технически тривиално, но при голяма норма на матрицата на преходите този подход остава непрактичен. От друга страна, нормата на матрицата може да бъде намалена единствено ако задачата бъде преформулирана подобно на разглеждания по повод изключването на изотопа на телура от веригата за ксенона.

Нека за целите на настоящия подраздел бъде избрана следната сравнително проста матрична норма:

$$\|\hat{\mathbf{A}}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (30)$$

Поради физичния смисъл на събираемите в уравненията (12) оценката за нормата на матрицата се свежда до $2 \max_{1 \leq j \leq n} (\Phi \sigma_j + \lambda_j)$, тъй като скоростта на изчезване на даден

нуклид е числено равна на сумата от скоростите на образуване на неговите дъщерни нуклиди. Така, за да се намали нормата на матрицата на преходите, би било необходимо от системата да бъдат изключени нуклидите, които имат най-големи скорости на изчезване. Критерият за изключване обикновено се избира емпирично, така че при конкретна стъпка на интегриране редът (28) да се сходя за неголям брой итерации k .

За илюстрация на предимството при сходимостта след изключване на даден нуклид можем отново да се върнем на задачата за ксенона. При критерий за сходимост

$\delta = 1.E-4$ решението на задачата по метода на матричната експонента е практически неразлично от резултатите, представени в предходния подраздел. При избор на сравнително малка стъпка на интегриране $\Delta t = 0.1h$ за първите 40 h системата с явно отчитане на телура изисква средно 32 итерации на стъпка за достигане на сходимост. При изключване на телура и равни други условия средният брой на итерациите се свежда до едва 2.

Концентрациите на изключените нуклиди могат да бъдат оценени по следния начин. Нека например от веригата $A \rightarrow B \rightarrow C$ бъде изключен нуклидът B , чието балансно уравнение в случая е:

$$\frac{d}{dt} N_B(t) = \lambda_{A \rightarrow B} N_A(t) - \lambda_B N_B(t) \quad (31)$$

Решение на (31) може да се получи чрез прилагане на техниката на интегрирания множител. Работният израз има вида:

$$N_B(t) = N_B(t_0) \exp(-\lambda_B(t-t_0)) + \lambda_{A \rightarrow B} \int_{t_0}^t N_A(t') \exp(-\lambda_B(t-t')) dt' \quad (32)$$

Тъй като методът на матричната експонента дава дискретни стойности за решението на $N_A(t)$, решението за изключения нуклид $N_B(t)$ на основата на (32) може да се получи например с помощта на методите за числено интегриране.

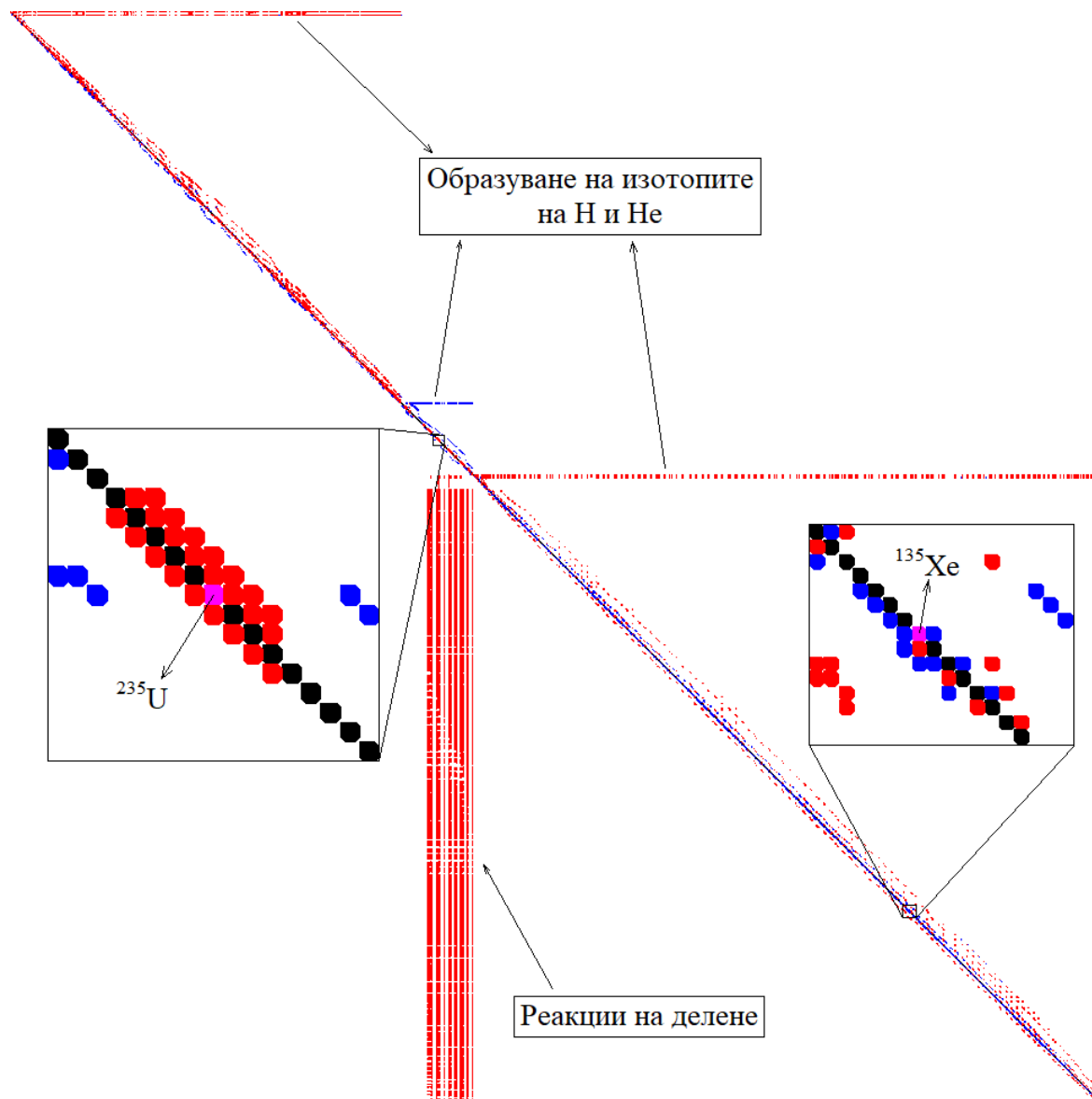
4. Решение на задачата за еволюция на нуклидния състав на ядреното гориво

За целите на настоящия раздел е използвана библиотеката с еднотрупови константи, коментирана по повод на раздел 3. За решаването на системата от балансни уравнения е използван методът на матричната експонента в програмната реализация на модула ORIGEN-S (Bell, 1973), който е част от комплекса SCALE.

Общият брой на нуклидите в библиотеката е 1946, от които уникалните записи са 1482. Това е така, защото за целите на различни статистики и печати нуклидите в библиотеката са разделени в три категории според веригата им на образуване: 1) група на леките елементи и продуктите на активация; 2) група на актинидите и тежките елементи; 3) група на продуктите от делене. Някои изотопи присъстват в повече от една от тези категории, което обяснява наличието на дубликати.

Структурата на матрицата на преходите е силно разрежена. При решаването на задачата в паметта на машината се пазят единствено нейните ненулеви елементи, чиито позиции се адресират с помощни масиви. Разгърнатият вид на матрицата е представен на Фиг. 8. Диагоналните елементи в черен цвят (или магента за илюстрация на конкретен изотоп) представляват коефициентите в системата, свързани със скоростта на изчезване на нуклидите. Извъндиагоналните елементи в син цвят представляват коефици-

ентите в системата, отговарящи за образуването на нуклидите в следствие на радиоактивен разпад на техните родителски нуклиди, а тези в червен цвят представляват коефициентите в системата, отговарящи за образуването на нуклидите в следствие на поглъщане на неутрон от техните родителски нуклиди.

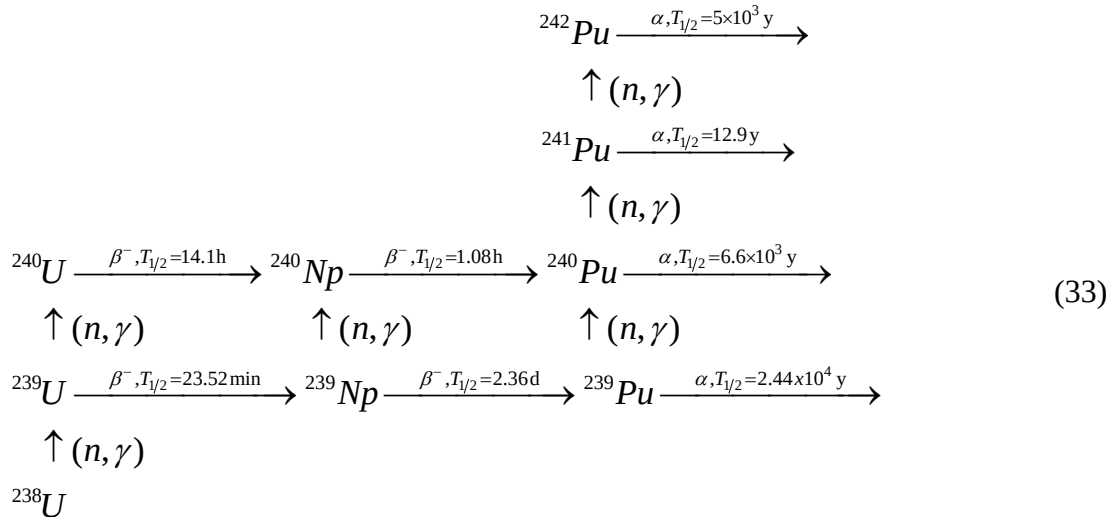


Фиг. 8. Структура на матрицата на преходите

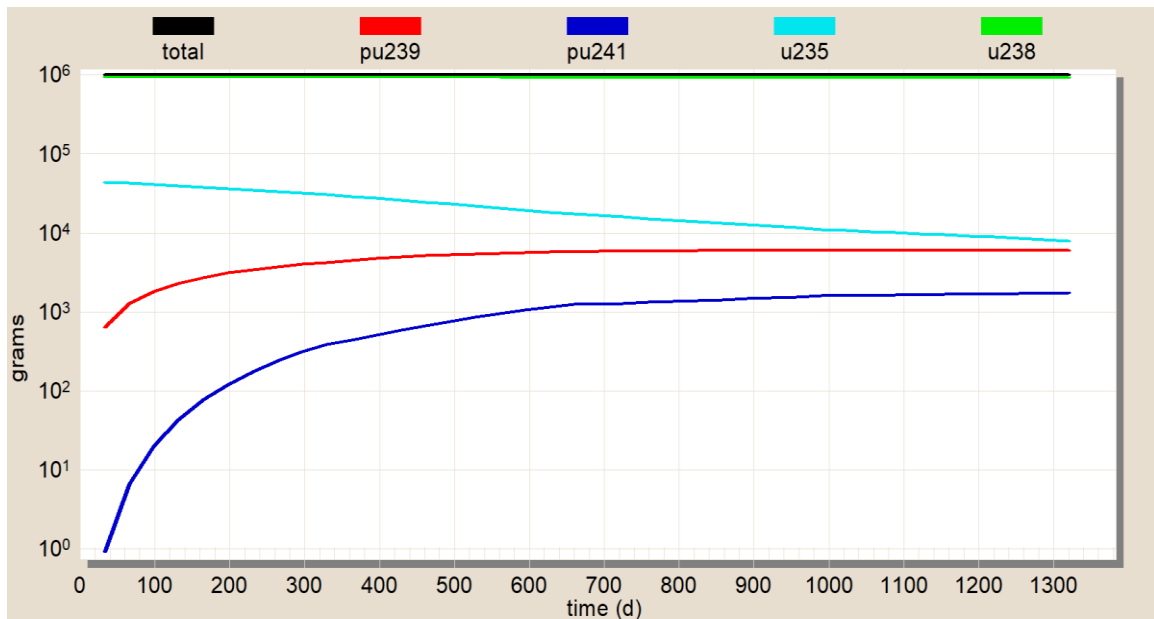
Резултатите, представени до края на раздела, са получени по време на летния студентски стаж в АЕЦ „Козлодуй“, 2025 г, с помощта на средствата на комплекса SCALE, наличен на работните станции в сектор „Реакторно-физични разчети“.

В реакторите на топлинни неутрони с увеличаването на дълбочината на изгаряне на горивото, от една страна, намалява концентрацията на нуклидите, за чието делене е достатъчна енергията на свързване на погълнатия неутрон (уран-233, уран-235, плутоний-239, плутоний-241), докато от друга страна, поглъщането на неутрони от нуклиди,

които се делят при по-високи неутронни енергии (уран-238, плутоний-240), води до т.нар. процес на *възпроизводство* на ядрено гориво, при който чрез серия от ядрени превръщания се получават нуклиди, които могат да се делят с топлинни неутрони. Една примерна верига е показана в (33).



Процесът на изгаряне и възпроизводство е илюстриран на Фиг. 9 за времеви интервал от четири горивни кампании за ядреното гориво, като началните условия са за количество от 1 MTU (метричен тон уран).



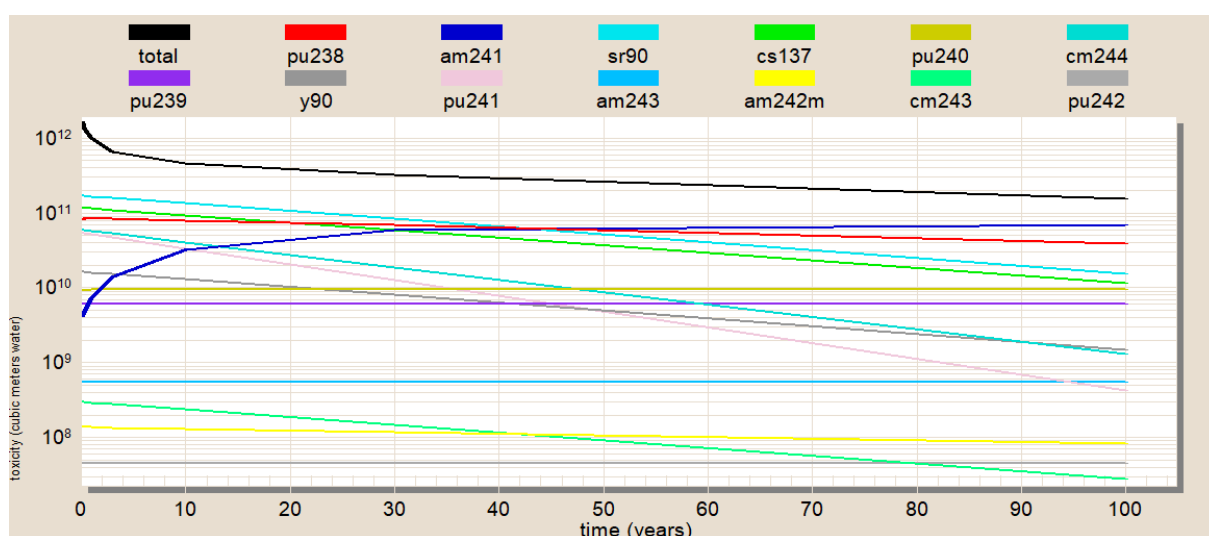
Фиг. 9. Илюстрация на процесите на изгаряне и възпроизводство на ядрено гориво

Една сравнително важна характеристика на отработеното ядрено гориво е неговата радиотоксичност. Тя представлява потенциалната опасност за човешкото здраве H_p при поглъщане на радиоактивен материал (Ojovan and Lee, 2014) и се дефинира като обема от питейна вода, в който първоначалното количество радиоактивен материал

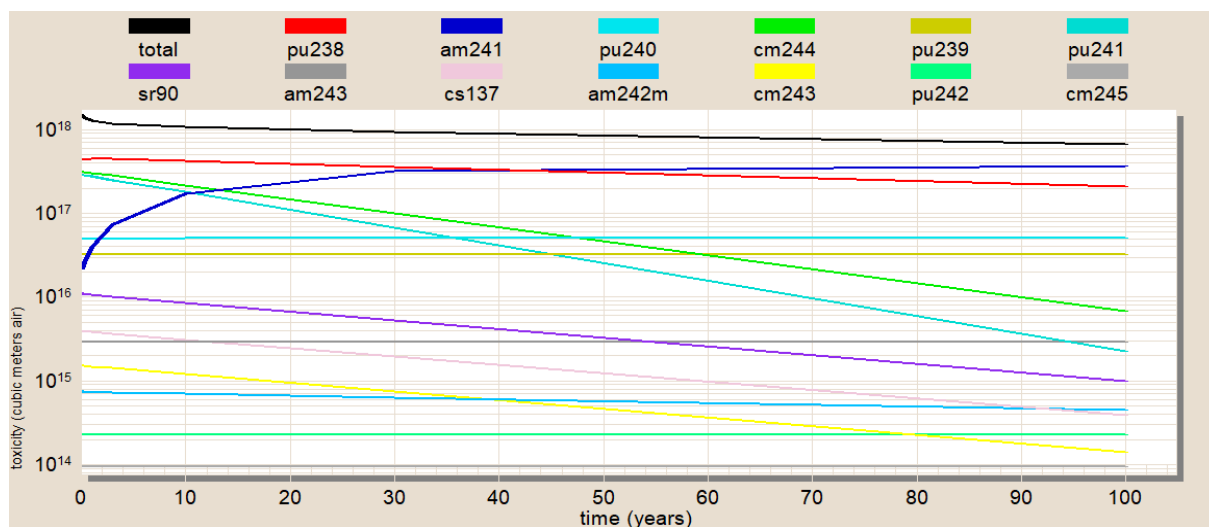
трябва да бъде разреден, така че да се достигнат такива нива на концентрация на опасната субстанция ILs (Intervention Levels), които не налагат вземането на допълнителни мерки за безопасност според препоръките (ICRP, 1996) на ICRP (International Commission on Radiological Protection):

$$H_p(t) = \sum_i \frac{C_i(0) \exp(-\lambda_i t)}{IL_i} V \quad (34)$$

където $C_i(0)$ е началната концентрация на i -тия нуклид, λ е константа на разпад, а V е началният обем в m^3 , в който е затворен радиоактивният материал (например общия обем на горивните таблетки според количеството, което подлежи на радиологична оценка).



Фиг. 10. Радиотоксичност (пълна и на избрани изотопи) на ядрено гориво след края на експлоатация в единици m^3 вода



Фиг. 11. Радиотоксичност (пълна и на избрани изотопи) на ядрено гориво след края на експлоатация в единици m^3 въздух

Аналогично на (34) се задава и радиотоксичността за случаите на инхалация, като величината се оценява количествено в единици обем въздух (вместо вода). Поведението на радиотоксичността на ядреното гориво във времето за първите 100 години след края на експлоатация е представено на Фиг. 10 в контекста на опасност при поглъщане и на Фиг. 11 за случаите, засягащи потенциална инхалация.

5. Заключение

Изследването на еволюцията на изотопния състав на ядреното гориво е важен елемент от реакторната физика в контекста на някои анализи, свързани с ядрената безопасност по време на експлоатация и съхранение на ядрения материал. В настоящата дипломна работа са описани основните физични механизми, които водят до изменението на нуклидния състав на ядреното гориво, и са разгледани някои техники и подходи на математическото моделиране за решаване на поставената задача, като са коментирани техните граници на приложимост, както и техните предимства и недостатъци. Накрая са предоставени графични резултати за илюстрация на някои характеристики в поведението и свойствата на ядреното гориво по времето на експлоатация и последващото съхранение.

Литература

Bateman H., 1910. *The Solution of a System of Differential Equations Occurring in the Theory of Radioactive Transformations*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 15, pp. 423-427

Bell M., 1973. *ORIGEN – The ORNL Isotope Generation and Depletion Code*, Technical Report, ORNL-4628 (CCC-217), Union Carbide Corporation (Nuclear Division), Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn.

Chadwick M., Herman M., Obložinský P., Dunn M., Danon Y., Kahler A., Smith D., Pritychenko B., Arbanas G., Arcilla R., Brewer R., Brown D., Capote R., Carlson A., Cho Y., Derrien H., Guber K., Hale G., Hoblit S., Holloway S., Johnson T., Kawano T., Kiedrowski B., Kim H., Kunieda S., Larson N., Leal L., Lestone J., Little R., McCutchan E., MacFarlane R., MacInnes M., Mattoon C., McKnight R., Mughabghab S., Nobre G., Palmiotti G., Palumbo A., Pigni M., Pronyaev V., Sayer R., Sonzogni A., Summers N., Talou P., Thompson I., Trkov A., Vogt R., van der Marck S., Wallner A., White M., Wiarda D., Young P., 2011. *ENDF/B-VII.1 Nuclear Data for Science and Technology: Cross Sections, Covariances, Fission Product Yields and Decay Data*, Nuclear Data Sheets, Volume 112, Issue 12, pp. 2887-2996

Diiorio G., 1976. *Direct physical measurement of mass yields in thermal fission of uranium-235*, University of Illinois, Urbana, USA

Harding P., 2016. *Uranium for Nuclear Power: Resources, Mining and Transformation*, Woodhead Publishing. *Part III: Chapter 12 – Uranium Enrichment*, pp. 321-351

ICRP, 1996. *Age-dependent Doses to Members of the Public from Intake of Radionuclides: Part 5 Compilation of Ingestion and Inhalation Dose Coefficients*, Annals of the ICRP, ICRP Publication 72

Ilas G., Murphy B., Gauld I., 2007. *VVER and RBMK cross section libraries for ORIGEN-ARP*, Oak Ridge National Laboratory, USA

Krane K., 1988. *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Inc. *Chapter 13 – Nuclear Fission*

Ojovan M. and Lee W., 2014. *An Introduction to Nuclear Waste Immobilisation*, Elsevier. *Chapter 3 – Contaminants and Hazards*, pp. 25-27

Schwerer O., 1985. *ENDF/B-5: Fission Product Yields File*, Documentation Series of the IAEA Nuclear Data Section

Wieselquist W., Lefebvre, R., Jessee, M., 2020. *SCALE Code System*, Technical Report, Oak Ridge National Lab. (ORNL), Oak Ridge, TN (United States). *Chapter 5 – Depletion, Activation, and Spent Fuel Source Terms*, pp 683-946

Приложение

Решение на уравненията за ^{135}I и ^{135}Xe

Задачата е:

$$\frac{d}{dt} I(t) = \gamma_I \Sigma_f \Phi - \lambda_I I(t)$$

$$\frac{d}{dt} Xe(t) = \gamma_{Xe} \Sigma_f \Phi + \lambda_I I(t) - \sigma_{Xe} \Phi Xe(t) - \lambda_{Xe} Xe(t)$$

$$I(0) = I_0; \quad Xe(0) = Xe_0$$

Последователността от стъпки за решение на задачата чрез използване на техниката на интегриращия множител е:

$$\frac{d}{dt} I(t) + \lambda_I I(t) = \gamma_I \Sigma_f \Phi$$

$$\exp(\lambda_I t) \frac{dI(t)}{dt} + \lambda_I \exp(\lambda_I t) I(t) = \gamma_I \Sigma_f \Phi \exp(\lambda_I t)$$

$$\frac{d}{dt} (\exp(\lambda_I t) I(t)) = \gamma_I \Sigma_f \Phi \exp(\lambda_I t)$$

$$\int_{t' \in [0; t]} d(\exp(\lambda_I t') I(t')) = \int_0^t \gamma_I \Sigma_f \Phi \exp(\lambda_I t') dt$$

$$I(t) \exp(\lambda_I t) - I(0) = \frac{\gamma_I \Sigma_f \Phi}{\lambda_I} (\exp(\lambda_I t) - 1)$$

$$I(t) = I_0 \exp(-\lambda_I t) + \frac{\gamma_I \Sigma_f \Phi}{\lambda_I} (1 - \exp(-\lambda_I t))$$

$$\frac{d}{dt} Xe(t) + (\sigma_{Xe} \Phi + \lambda_{Xe}) Xe(t) = \gamma_{Xe} \Sigma_f \Phi + \lambda_I I(t)$$

$$\omega_{Xe} \equiv \sigma_{Xe} \Phi + \lambda_{Xe}$$

$$\exp(\omega_{Xe} t) \frac{dXe(t)}{dt} + \omega_{Xe} \exp(\omega_{Xe} t) Xe(t) = \gamma_{Xe} \Sigma_f \Phi \exp(\omega_{Xe} t) + \lambda_I I(t) \exp(\omega_{Xe} t)$$

$$\frac{d}{dt} (\exp(\omega_{Xe} t) Xe(t)) = \gamma_{Xe} \Sigma_f \Phi \exp(\omega_{Xe} t) + \lambda_I I(t) \exp(\omega_{Xe} t)$$

$$\int_{t' \in [0; t]} d(\exp(\omega_{Xe} t') Xe(t')) = \int_0^t (\gamma_{Xe} \Sigma_f \Phi \exp(\omega_{Xe} t') + \lambda_I I(t') \exp(\omega_{Xe} t')) dt'$$

$$Xe(t)\exp(\omega_{xe}t) - Xe(0) = \int_0^t \gamma_{xe} \Sigma_f \Phi \exp(\omega_{xe}t') dt' \\ + \int_0^t \lambda_I I(t') \exp(\omega_{xe}t') dt'$$

$$Xe(t)\exp(\omega_{xe}t) - Xe_0 = \frac{\gamma_{xe} \Sigma_f \Phi}{\omega_{xe}} (\exp(\omega_{xe}t) - 1) \\ + \int_0^t \lambda_I \left(I_0 \exp(-\lambda_I t') + \frac{\gamma_I \Sigma_f \Phi}{\lambda_I} (1 - \exp(-\lambda_I t')) \right) \exp(\omega_{xe}t') dt'$$

$$Xe(t)\exp(\omega_{xe}t) - Xe_0 = \frac{\gamma_{xe} \Sigma_f \Phi}{\omega_{xe}} (\exp(\omega_{xe}t) - 1) \\ + \lambda_I I_0 \int_0^t \exp((\omega_{xe} - \lambda_I)t') dt' \\ + \gamma_I \Sigma_f \Phi \int_0^t \exp(\omega_{xe}t') dt' \\ - \gamma_I \Sigma_f \Phi \int_0^t \exp((\omega_{xe} - \lambda_I)t') dt'$$

$$Xe(t)\exp(\omega_{xe}t) - Xe_0 = \frac{\gamma_{xe} \Sigma_f \Phi}{\omega_{xe}} (\exp(\omega_{xe}t) - 1) \\ + \frac{\lambda_I I_0}{\omega_{xe} - \lambda_I} (\exp((\omega_{xe} - \lambda_I)t) - 1) \\ + \frac{\gamma_I \Sigma_f \Phi}{\omega_{xe}} (\exp(\omega_{xe}t) - 1) \\ - \frac{\gamma_I \Sigma_f \Phi}{\omega_{xe} - \lambda_I} (\exp((\omega_{xe} - \lambda_I)t) - 1)$$

$$Xe(t) = Xe_0 \exp(-\omega_{xe}t) \\ + \frac{\gamma_{xe} + \gamma_I}{\omega_{xe}} \Sigma_f \Phi (1 - \exp(-\omega_{xe}t)) \\ + \frac{\lambda_I I_0 - \gamma_I \Sigma_f \Phi}{\omega_{xe} - \lambda_I} (\exp(-\lambda_I t) - \exp(-\omega_{xe}t))$$